SISTEMA DE PELOTA Y ARO: PRINCIPIOS BASICOS

Marco A. Pérez-Cisneros[*], Mark Readman[+] y Peter Wellstead[+]

[*]División de Electrónica y Computación, CUCEI, Universidad de Guadalajara, México.
[+]Control Systems Principles

RESUMEN: Este artículo pertenece a la serie de notas de aplicación en modelado y control de sistemas que han sido creadas por "Control Systems Principles" para ilustrar los principios básicos de la teoría de control. Dichos fundamentos incluyen algunos sistemas genéricos y métodos que son comunes en muchas áreas del desarrollo tecnológico y la industria. Estas notas de aplicación buscan explicar dichos sistemas y sus principios de una manera clara y fácil de entender. Por tanto las notas describen primero las características mas importantes de un sistema, como funciona y finalmente como puede ser controlado. Diferentes sistemas en tiempo real son utilizados para demostrar la viabilidad de los algoritmos de control. Dichos sistemas han sido diseñados por nuestro fundador Prof. Peter Wellstead y son manufacturados por "TQ Education & Training Ltd" bajo la línea CE. Cuando es posible, las notas de aplicación incluyen también los resultados de los experimentos utilizando estos sistemas. En particular, esta nota describe el sistema de Pelota y Aro que se emplea para demostrar la dinámica de sistemas oscilantes y procesos de fase no-mínima.

1. ¿Como es el sistema de Pelota y Aro?

El sistema de Pelota y aro tiene que ver con la dinámica de una pelota de acero que rueda en la parte interna de un aro circular como se muestra en la figura 1, donde la posición de la pelota se basa en la suposición de que el aro esta rotando en sentido contrario a las manecillas del reloj. El aro se encuentra montado verticalmente sobre el eje de un motor eléctrico de tal manera que puede rotar sobre su propio eje. Existe una ranura en la parte interior del borde del aro que asegura que la pelota ruede por la parte interior del aro. Cuando el aro gira, la pelota tiende a moverse en la dirección de la rotación del aro. En cierto punto, la gravedad vence las fuerzas de fricción en la pelota y posteriormente se repliega, ocasionando un movimiento oscilatorio.

El motor se usa para rotar el aro de tal manera que su posición angular puede ser controlada. En la figura, el ángulo θ es la posición angular del aro. La posición de la pelota es dada por:

1. y, la posición de la pelota en la periferia del aro con respecto del punto dada, o
2. ψ, el ángulo de agitación, que mide la desviación de la pelota con respecto de su posición de descanso.

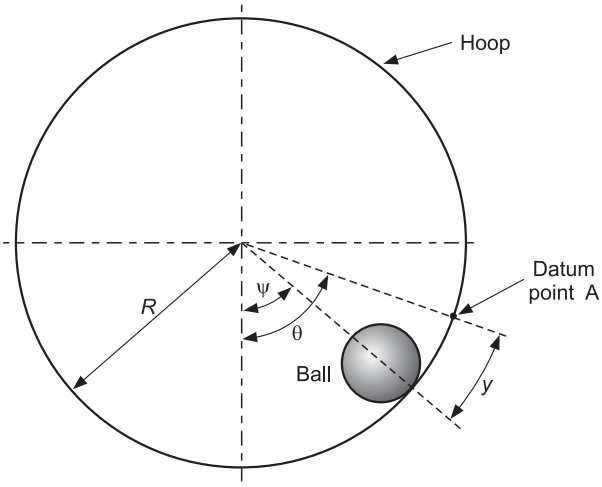

Figura 1. El sistema de Pelota y Aro.

2. ¿Por qué el sistema de Pelota y Aro es importante?

Es importante por dos razones. Primero puede ser usado para simular y estudiar el control de las oscilaciones dentro de un contenedor de líquidos, es especial cuando este se encuentra en movimiento o sufriendo cambios de velocidad o dirección. Segundo, el sistema de Pelota y Aro puede ser usado para entender el comportamiento de los sistemas de fase no-mínima, estudiados por la teoría de control y que se discuten mas tarde en estas notas. Por ahora vamos a explicar la relevancia para la ingeniería de control de las oscilaciones en los contenedores de líquidos.

La oscilación en los líquidos, también llamada agitación es importante por el movimiento de grandes cantidades de líquidos que pueden influenciar el movimiento del contenedor, lo cual es generalmente indeseable y muy peligroso.

Por ejemplo, el movimiento de un transporte de líquidos en una carretera conforme este cambia de dirección (para dar vuelta en una esquina muy cerrada por ejemplo) puede alterar el manejo y la estabilidad del camión por completo. De hecho cualquier acción que requiera un movimiento rápido de grandes cantidades de fluido, puede presentar las características de oscilación y agitación del líquido.

Existen muchos otros ejemplos donde la oscilación de líquidos debe ser considerada. Ejemplos de importancia práctica pueden ser:

1. La carga liquida de un tanque en un ferrocarril, puede golpear de un lado a otro en un vía ferroviaria no equidistante, lo que puede causar esfuerzos excesivos en la suspensión del vagón o de la vía.
2. El liquido en los contenedores de un barco se agita cuando el barco se encuentra en aguas violentas, lo que puede reducir la estabilidad del barco.
3. El combustible de un misil puede oscilar cuando se hacen cambios de curso muy severos, lo que puede interrumpir el sistema de control de navegación en el misil.

De hecho el combustible de un misil es normalmente sólido y dicho problema no existe muy a menudo. En otros casos los contenedores se diseñan para reducir o prevenir la agitación de los líquidos. Esto no funciona todo el tiempo por lo que la agitación de los líquidos es de cualquier forma un problema de control interesante. En algunos casos, los sistemas de control por retroalimentación en un vehículo o navío pueden ser usados para reducir aun más la agitación de los líquidos.

Las cargas oscilatorias no tienen que estar en forma liquida para generar problemas, por ejemplo un problema similar ocurre en grúas móviles, donde la carga al final de un cable muy largo puede oscilar e

interactuar con el manejo de la grúa para una descarga precisa de la carga. De nuevo los sistemas de control reducen las oscilaciones de la carga.

Es muy fácil demostrar que el comportamiento dinámico de la agitación de los líquidos usando un plato profundo o tazón que se llena hasta aproximadamente un cuarto de su capacidad. Moviendo el tazón rápidamente hacia un lado, puede observarse como el agua se mueve en ida y venida de una manera oscilatoria. Si sostienes el tazón con el agua oscilando, sentirás la fuerza causada por las oscilaciones. Imagina esta fuerza multiplicada cientos de veces conforme un contenedor de líquidos en un barco se mueve durante una tormenta y entonces apreciaras porque la agitación de los líquidos es importante y porque debe ser entendida y controlada.

El sistema de pelota y aro es una analogía para el movimiento de un líquido en una nave cilíndrica. La figura 2 muestra dicha analogía. La figura 2(a) ilustra la agitación en un cilindro mientras que la figura 2(b) enseña como la pelota rueda análogamente dentro del aro.

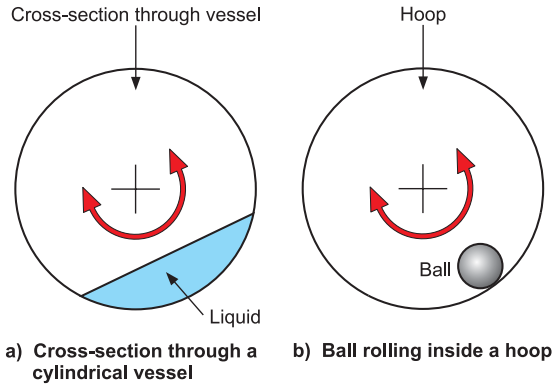

Figura 2. Ilustrando la analogía.

Para entender esto un poco mejor, considera el péndulo cilíndrico que se muestra en la figura 2 y compararlo con el tazón de agua. El radio del cilindro, *R,* determina la frecuencia de oscilación y la fricción en el rodado de la pelota determina el rango de caída de las oscilaciones. Lo mismo es verdadero si la pelota se reemplaza por un líquido en donde la frecuencia de la agitación es dada por el radio del contenedor mientras que la viscosidad del líquido determinara el rango de caída de las oscilaciones.

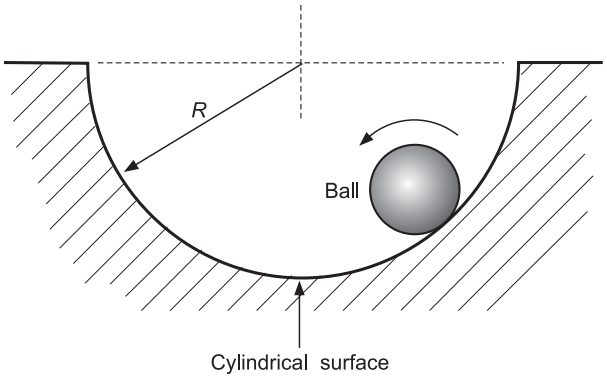

Figura 3. Péndulo cilíndrico.

La pelota y el aro simulan un problema práctico muy importante. Sin embargo, es también importante para estudios prácticos de laboratorio por que nos permite examinar las oscilaciones en sistemas dinámicos en general y demostrar como la teoría de control puede cambiar esas oscilaciones en formas muy interesantes. El Prof. Wellstead tuvo la idea de diseñar el sistema de pelota y aro mientras trabajada hace algunos años en estrategias de control para reducir la agitación de líquidos en sistemas dinámicos. El sistema se diseño finalmente como muestra tecnológica para demostrar a los ingenieros y administradores

algunos de los métodos de control para reducir las oscilaciones de los líquidos en los tanques. Desde entonces a sido una gratificante sorpresa lo bien que el sistema de pelota y aro simula la agitación de líquidos y lo simple y efectivo que los controladores anti-agitación pueden ser. El simulador de pelota y aro resulta en el sistema CE109 manufacturado por TQ que se describe mas tarde en estas notas.

3. El modelo del sistema de pelota y aro.

La dinámica del sistema de pelota y aro es complicada y difícil de derivar utilizando procedimientos estándar. Un método para hacer la deducción mas sencilla es utilizando un método de variación. La Figura 4 muestra de nuevo el sistema de pelota y aro pero incluyendo etiquetas para las variables. El aro es montado en el eje del motor el cual es modelado como una fuente de torque $\tau(t)$. El comportamiento dinámico del sistema será completamente representado por las ecuaciones de movimiento de la posición angular del aro θ, y la posición y de la pelota en la periferia interior del aro. Por esta razón utilizaremos estas variables como las coordenadas generalizadas en las ecuaciones de Lagrange. Ninguna de estas coordenadas es limitada, de tal forma que las diferenciales son respectivamente $\delta\theta$ y δy. Entonces las ecuaciones de Lagrange para dichas coordinadas son, para θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} + \frac{\delta J}{\delta\dot{\theta}} = \tau_\theta(t) \qquad \textbf{(1)}$$

y para la coordenada y:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{y}}\right) - \frac{\delta L}{\delta y} + \frac{\delta J}{\delta\dot{y}} = F_y(t) \qquad \textbf{(2)}$$

donde L es el Lagrangiano, J es el contenido del sistema, $\tau_\theta(t)$ es el torque generalizado externo con respecto de θ y la fuerza generalizada externa $F_y(t)$ con respecto de la coordenada y.

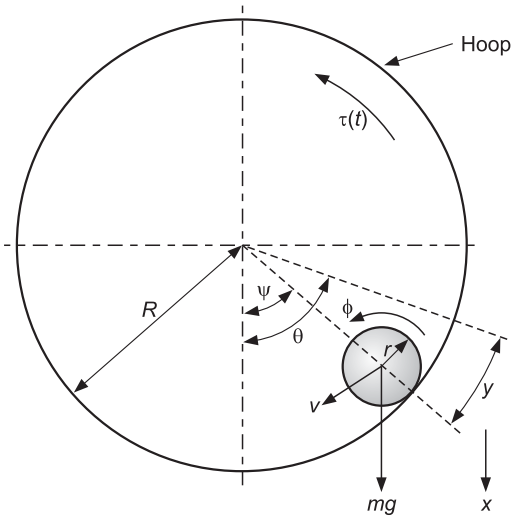

Figura 4. El sistema de pelota y aro.

Ahora necesitamos algunas ecuaciones para relacionar las coordenadas generalizadas con otras variables en el sistema. En particular, la rotación angular de la pelota ϕ, es dada por:

$$\phi = \frac{y}{r} \qquad \textbf{(3)}$$

La velocidad traslacional de la pelota v es dada también por:

$$v = (R - r)\dot{\psi} \tag{4}$$

donde r = radio verdadero sobre cual rueda la pelota. El verbo rodar esta señalado con rojo por que la pelota rueda en la ranura interior del aro. Esto quiere decir que el radio del rodado será menos que el radio real de la pelota r_b.

El ángulo de inclinación ψ se relaciona con las coordenadas generalizadas por medio de:

$$\psi = \left(\theta - \frac{y}{R}\right) \tag{5}$$

El Lagrangiano del sistema L, se construye completamente de energías cinemáticas U, que están asociadas con la rotación del aro, la rotación de la pelota y la traslación de su centro de masa. Entonces el sistema Lagrangiano puede ser expresado como:

$$L = U = \tfrac{1}{2}\left(I_{\mathrm{a}}(\dot{\theta})^2 + I_{\mathrm{b}}(\dot{\phi})^2 + mv^2\right) \tag{6}$$

Rescribiendo esta ecuación en términos de las coordenadas generalizadas resulta:

$$L = \tfrac{1}{2}\left[I_{\mathrm{a}}(\dot{\theta})^2 + I_{\mathrm{b}}\left(\frac{\dot{y}}{r}\right)^2 + m\left((R - r)\left(\dot{\theta} - \frac{\dot{y}}{R}\right)\right)^2\right] \tag{7}$$

donde:

I_{a} = Momento de inercia del aro;

I_{b} = Momento de inercia de la pelota;

m = Masa de la pelota;

Además el sistema de contenido J, se ha asociado con la función de la fricción en el rodado de la pelota, representada por el coeficiente b_{b} y el cuerpo del motor que se representa mediante un coeficiente de fricción rotacional b_{m} lo que resulta en:

$$J = \frac{1}{2}\left[b_{\mathrm{b}}\left(\frac{\dot{y}}{r}\right)^2 + b_{\mathrm{m}}(\dot{\theta})^2\right] \tag{8}$$

Las entradas generalizadas son dos: primero para la variable θ, el torque generalizado $\tau_\theta(t)$ es dado por la suma del torque de entrada del motor y la gravedad que actúa sobre la pelota como sigue:

$$\tau_\theta(t) = \tau(t) + mg\frac{\delta x}{\delta \theta} \tag{9}$$

Para la variable y, la F_{y} generalizada es dada por:

$$F_{\mathrm{y}} = mg\frac{\delta x}{\delta y} \tag{10}$$

Donde x es el desplazamiento vertical de la pelota que se mide positivamente hacia abajo como se define a continuación:

$$x = -(R-r)\left(1-\cos\left(\theta - \frac{y}{R}\right)\right) \tag{11}$$

De aquí,

$$\tau_\theta(t) = \tau(t) - mg\,(R-r)\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right) \tag{12}$$

$$F_{\mathrm{y}}(t) = mg\left(\frac{R-r}{R}\right)\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right) \tag{13}$$

Las ecuaciones de movimiento siguen la forma general de la ecuación de Lagrange, de tal manera que para θ tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} + \frac{\delta J}{\delta \dot{\theta}} = \tau_\theta(t) \tag{14}$$

$$\left[I_{\mathrm{a}} + m(R-r)^2\right]\ddot{\theta} + b_{\mathrm{m}}\dot{\theta} - \frac{m(R-r)^2}{R}\ddot{y} = \tau(t) - mg\,(R-r)\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right) \tag{15}$$

Y para la variable y:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{y}}\right) - \frac{\delta L}{\delta y} + \frac{\delta J}{\delta \dot{y}} = F_{\mathrm{y}}(t) \tag{16}$$

$$\left[\frac{\mathrm{I}_b}{r^2} + \frac{m(R-r)^2}{R^2}\right]\ddot{y} + \frac{b_{\mathrm{b}}}{r^2}\dot{y} - \frac{m(R-r)^2}{R}\ddot{\theta} = mg\frac{(R-r)}{R}\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right) \tag{17}$$

Las ecuaciones (15) y (17) son las ecuaciones dinámicas del movimiento del sistema de pelota y aro. Ambos conjuntos de ecuaciones pueden ser combinados en una sola ecuación diferencial expresada en forma matricial que resulta en:

$$\begin{pmatrix} I_a + m(R-r)^2 & \dfrac{-m(R-r)^2}{R} \\ \dfrac{-m(R-r)^2}{R} & \dfrac{I_b}{r^2} + \dfrac{m(R-r)^2}{R^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \dfrac{b_b}{r^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg\begin{pmatrix} (R-r)\sin(\theta - \dfrac{y}{R}) \\ -\left(\dfrac{R-r}{R}\right)\sin(\theta - \dfrac{y}{R}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

4. Simplificaciones del modelo.

4.1. Simplificación lineal

Asumiendo que el ángulo de inclinación $\psi = \left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ es relativamente pequeño, es posible reemplazar $\sin\left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ por $\left(\theta - \frac{y}{R}\right)$ de donde obtenemos una ecuación matricial de segundo orden de la forma:

$$\begin{pmatrix} I_a + m(R-r)^2 & \dfrac{-m(R-r)^2}{R} \\ \dfrac{-m(R-r)^2}{R} & \dfrac{I_b}{r^2} + \dfrac{m(R-r)^2}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \dfrac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} (R-r) & -\dfrac{(R-r)}{R} \\ -\dfrac{(R-r)}{R} & \dfrac{(R-r)}{R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(19)}$$

La ecuación (19) cumple con la forma específica de la siguiente ecuación:

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = Bu \quad \textbf{(20)}$$

Esta es la forma general usada frecuentemente en robótica para formular claramente las ecuaciones diferenciales del sistema. Es un camino conveniente también para formular las ecuaciones del sistema en variable de estado. Específicamente si utilizamos $X = \begin{pmatrix} \theta & y \end{pmatrix}^T$ y $X_1 = X$, $X_2 = \dot{X}$, la expresión (20) puede expresarse en ecuaciones de estado como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{bmatrix} u \\ Y &= C \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \textbf{(21)}$$

La elección de la matriz de salida C dependerá en los estados que se miden. El conjunto de ecuaciones (21) puede ser utilizado para diseñar el controlador, lo cual se realiza en la siguiente nota de aplicación en esta serie.

4.2. Aproximaciones y sustituciones.

Debido a que el radio del aro es mucho más grande que el radio de la pelota $R >> r$, la ecuación (19) puede ser escrita como sigue:

$$\begin{pmatrix} I_a + mR^2 & -mR \\ -mR & \dfrac{I_b}{r^2} + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \dfrac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & \dfrac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(22)}$$

Considera que el momento de inercia de una pelota sólida es $I_b = \dfrac{2}{5} m r_b^2$, y que el radio de la pelota es distinto al radio de rodado, por lo que las ecuaciones pueden ser escritas como sigue:

$$\begin{pmatrix} I_a + mR^2 & -mR \\ -mR & m\left(\dfrac{2r_b^2}{5r^2} + 1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_m & 0 \\ 0 & \dfrac{b_b}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + mg \begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & \dfrac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(23)}$$

Las ecuaciones matriciales diferenciales pueden separarse en ocasiones. En este caso, si el torque inercial de la pelota *m*, es pequeño comparado con el del aro y el torque del motor, entonces la primera ecuación en (23) puede ser escrita como la conocida ecuación diferencial para un motor de DC con una carga inercial I_a y fricción viscosa b_m:

$$I_a \ddot{\theta} + b_m \dot{\theta} = \tau(t) \quad \textbf{(24)}$$

y la segunda ecuación en (23) es:

$$\left(\frac{2r_b^2}{5r^2}+1\right)\ddot{y}+\frac{b_\mathrm{b}}{mr^2}\dot{y}+\frac{g}{R}y=R\left(\ddot{\theta}+\frac{g}{R}\theta\right) \qquad \textbf{(25)}$$

Las dos ecuaciones diferenciales que han sido separadas son muy útiles por que nos permiten escribir el modelo del sistema como dos funciones de transferencia en cascada, donde en la primera función de transferencia el torque del motor produce un ángulo del aro y en la segunda función de transferencia dicho ángulo del aro produce un posición para la pelota. Veamos esta y otras formas para representar el modelo del sistema en la sección 5.

5. Características interesantes de la dinámica del sistema de pelota y aro.

Dos características especiales del sistema de pelota y aro son su conveniencia para demostrar los "ceros de transmisión" y el comportamiento de fase no-mínima.

5.1. Ceros de transmisión.

Si la ecuación (25) se expresa como una función de transferencia:

$$\frac{y(s)}{\theta(s)} = R\left[\frac{s^2+\dfrac{g}{R}}{\left(\dfrac{2r_b^2}{5r^2}+1\right)s^2+\dfrac{b_\mathrm{b}}{mr^2}s+\dfrac{g}{R}}\right]$$

Entonces es claro que la función de transferencia relacionando el ángulo del aro $\theta(s)$, con la posición de la pelota en el aro $y(s)$ tiene ceros puramente imaginarios en $s=\pm j\dfrac{g}{R}$. Esto significa que el ángulo del aro θ esta bajo control de retroalimentación y una señal senoidal de frecuencia $\dfrac{g}{R}\,radianes/seg$ es aplicada a θ. Entonces genera una respuesta cero exacta en la posición de la pelota a la salida $y(s)$. En términos físicos, esto corresponde al caso donde la pelota oscila dentro del aro exactamente a la misma frecuencia que el aro. Para un observador "parado" en el aro, la pelota no se mueve por que la pelota y el aro se mueven sincronizadamente. Por supuesto que la pelota se encuentra moviéndose cuando se observa desde afuera, pero si se observa desde un punto adecuado pareciera que la pelota es estacionaria.

5.2. Comportamiento de fase no mínima y desplazamiento de los ceros.

Las salidas del sistema de pelota y aro son $\theta(s)$ y $\psi(s)$. Es posible construir la señal $y(s)$ restando las mediciones $\theta(s)$ y $\psi(s)$ después de ser escaladas. Dicho escalamiento es necesario para tomar en cuenta la amplificación y la probable inversión de signo introducida por los sensores de ángulo. Generalmente, podemos considerar una señal sintética de salida $x(s)$ que es dada por:

$$x(s) = \theta(s) - k_\mathrm{s}\psi(s) \qquad \textbf{(26)}$$

donde:

k_s = factor de ganancia escalar.

Nota que cuando k_s es la unidad, $x(s)$ es la variable $\dfrac{y(s)}{R}$, y esto corresponde a una versión escalada de la posición de la pelota en la periferia del aro. Nota también que la ecuación (26) es la combinación de las

dos señales de salida del sistema, de tal manera que la entrada tiene dos caminos para la salida $x(s)$. Rescribiendo la ecuación (26) como una función de transferencia tenemos:

$$\frac{x(s)}{\theta(s)} = 1 - k_s \frac{\psi(s)}{\theta(s)}$$

Variando la ganancia k_s podemos trazar el lugar de raíces de la función de transferencia para determinar la posición de los ceros. Encontraremos que parte de las trayectorias están en el plano del lado derecho, lo que significa que un comportamiento de fase no-mínima esta ocurriendo en el sistema. Esto caracteriza la fase no-mínima cuando la salida se va inicialmente en la dirección equivocada mientras escalones de entrada son aplicados.

5.3. Controlando la inclinación

Cuando un cambio de tipo escalón es requerido en el ángulo del aro deseado, la pelota puede oscilar antes de alcanzar su nueva posición de descanso, en otras palabras cierta inclinación podrá ser observada. Usando retroalimentación de un componente del ángulo de inclinación $\psi(s)$, es posible suprimir las oscilaciones de la pelota, lo que ilustra una forma dinámica del control de la inclinación. Esto no se demuestra aquí pero si se discutirá en una de las notas de aplicación en esta serie.

4. Ejemplo de un sistema de pelota y aro.

El sistema de pelota y aro CE109, manufacturado por “TQ Education and Training Ltd”, es una versión de escritorio de este problema que ha sido diseñada especialmente para la enseñanza e investigación de sistemas oscilatorios, control de retroalimentación, sistemas de fase no-mínima y otras propiedades de los sistemas dinámicos. Los principales elementos en el sistema son:

1. El aro que puede rotar con una pelota de acero en su periferia interior. (Es el disco negro que su observa en el centro de la fotografía en la figura 4).
2. El motor servo, M, que maneja el aro y controla su ángulo.
3. El sensor del ángulo del aro. (Es la flecha blanca que esta impresa en el disco negro como una indicación visual del ángulo del aro).
4. El sensor de ángulo para la pelota en el aro. (El puntero negro que apunta verticalmente hacia abajo es una indicación visual del ángulo de la pelota).

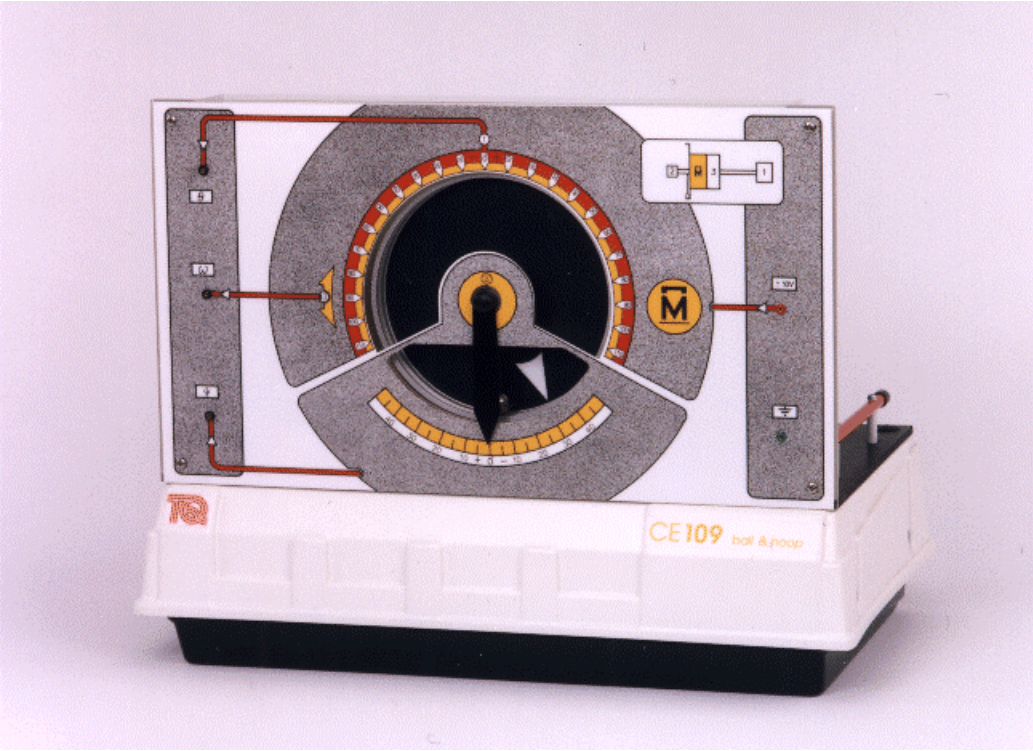

Figura 4. El sistema de pelota y aro CE109 manufacturado por TQ.

El sistema CE109 de pelota y aro puede ser usado para demostrar el control de velocidad y posición del aro. Cuando el ángulo del aro esta siendo controlado es posible utiliza el sistema para estudiar la dinámica de la inclinación (como se explico en el ejemplo previo) y para examinar nuevos métodos para controlar la inclinación.

6. Palabras finales.

Esperamos que nuestra exposición acerca de de los sistemas de pelota y aro haya sido clara para ti. No hemos incluido ningún ejemplo de sistemas de control porque hemos planeado incluirlos en la siguiente nota de aplicación en esta serie. Pedimos disculpas por adelantado por que no podemos contestar tus preguntas o dudas sobre detalles en el contenido de estas notas a menos de que tengamos un acuerdo con tu organización. Para más información sobre los sistemas de pelota y aro, consulta la pagina de Internet de TQ, utiliza las ligas de interés en nuestro sitio Web www.control-systems-principles.co.uk, o escribe directamente a TQ en el correo electrónico: info@tq.com. Para aprender más sobre el modelado de los sistemas de pelota y aro debes leer un libro sobre modelado de sistemas. Existen muchos libros de texto de excelente contenido entre los cuales podemos recomendarte el libro escrito por nuestro fundador el Prof. Peter Wellstead, “Introduction to Physical Modelling” publicado por “Academic Press”.