



# Análisis de Respuesta en Frecuencia

## *Reporte Técnico 10*

*Peter E. Wellstead<sup>+</sup>*

*Marco Antonio Pérez Cisneros\**

*<sup>+</sup>Control Systems Principles*

*Cheshire, UK*

*\*División de Electrónica y Computación, CUCEI*

*Universidad de Guadalajara, México*

---

**Solartron**

Victoria Road, Farnborough  
Hampshire GU14 7PW England  
Tel: +44 (0)1252 376666  
Fax: +44 (0)1252 544981  
Fax: +44 (0)1252 547384 (Transducers)

**Solartron Transducers**

19408 Park Row, Suite 320  
Houston, Texas, 77084 USA  
Tel: +1 281 398 7890  
Fax: +1 281 398 7891

**Solartron**

964 Marcon Blvd, Suite 200  
91882 MASSY, Cedex  
France  
Tel: +33 (0)1 69 53 63 53  
Fax: +33 (0)1 60 13 37 06

**Solartron Overseas Sales Ltd  
Instruments Division**

Block 5012 TECHplace II  
Ang Mo Kio Ave. 5, #04-11  
Ang Mo Kio Industrial Park  
Singapore 2056  
Republic of Singapore  
Tel: +65 482 3500  
Fax: +65 482 4645

**Solartron****Beijing Liaison Office**

Room 327. Ya Mao Building  
No. 16 Bei Tu Chen Xi Road  
Beijing 100101, PR China  
Tel: +86 10 2381199 ext 2327  
Fax: +86 10 2028617

Email: [solartron@solartron.com](mailto:solartron@solartron.com)  
Web: <http://www.solartron.com>

## **Prefacio**

La correlación del análisis de respuesta en frecuencia (FRA, por sus siglas en inglés) es un sistema muy bien establecido en los métodos de identificación. La técnica ha sobrevivido muchas propuestas alternativas, simplemente porque es demasiado sencillo, flexible y robusto. Por ejemplo, el uso de métodos de respuesta en frecuencia para medir la respuesta de sistemas mientras, bajo control de lazo cerrado, ha sido establecido por muchos años, visto que las estimaciones de lazo cerrado usando otros métodos de identificación han tomado mucho más para alcanzar, e incluso ahora requiere conocimientos expertos para aplicarlos. Lo mismo es válido para sistemas no lineales y sistemas donde las señales de entrada o salida están a la deriva o alterado por ruido. Los métodos FRA distribuyen con emisiones habituales mientras que métodos alternativos necesitan especiales formas y conocimientos.

Instrumentación para la correlación del análisis de respuesta en frecuencia fue inicializada por los fundadores de Solatron y la popularidad de la técnica es ampliamente usado debido a los desarrollos de los ingenieros de Solatron y la calidad y seriedad de sus diseñadores. Por esta razón ha sido un placer para mí escribir estas notas y haber colaborado con el investigador Solatron y el equipo de desarrollo.

Peter Wellstead  
Control Systems Centre, Manchester, Septiembre, 1983.

## **Prefacio para el reporte actualizado**

Desprezando el intenso esfuerzo sobre la parte de sistemas de identificación de los investigadores en décadas cercanas del siglo 20, los comentarios que hice en mi prefacio original queda enormemente cierto. Específicamente, la correlación del analizador de respuesta en frecuencia continúa para dominar sobre otros métodos en aplicaciones de identificación donde seguros y repetibles resultados son requeridos. Por esta razón la nueva edición de estas notas es, aparte de correcciones de errores de tipografía, casi inalterada de la primera.

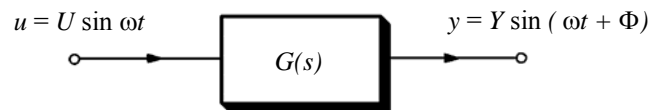
Peter Wellstead, Marco Antonio Pérez Cisneros.  
Control Systems Principles, Cheshire, Reino Unido, Enero, 2003.  
[www.control-systems-principles.co.uk](http://www.control-systems-principles.co.uk)

# Análisis de Respuesta en Frecuencia

Peter E Wellstead DSc. C.Eng. FIEE

## 1. Introducción

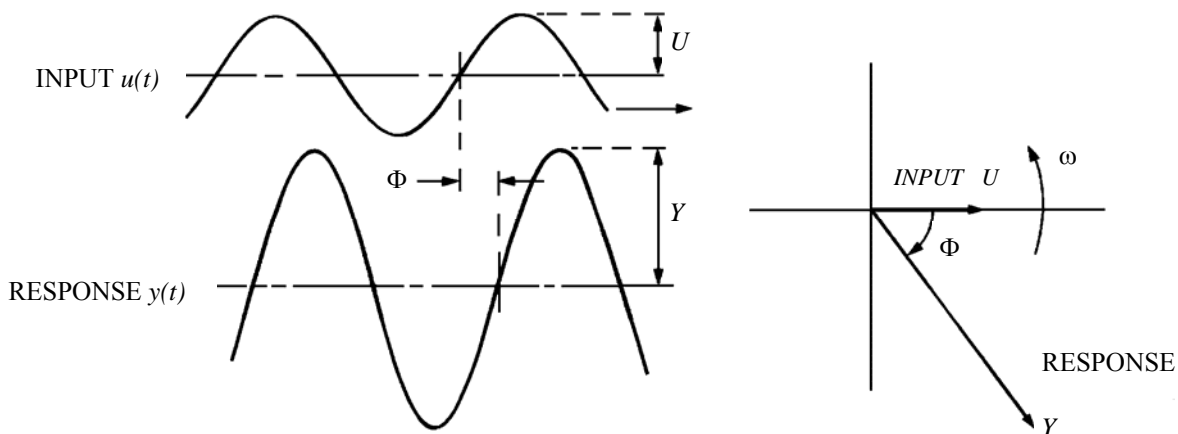
El análisis de respuesta en frecuencia es la técnica donde una señal de prueba senoidal es usada para medir puntos sobre la respuesta de frecuencia de una función de transferencia o función de impedancia. El básico set-up es mostrado en la Figura 1 en la cual una onda senoidal  $u(t)$  es aplicado para un sistema con la función de transferencia  $G(s)$ . Después de que la oscilación momentanea desarrollada para condiciones iniciales ha decaído, la salida  $y(t)$  viene a ser una onda senoidal pero con una magnitud diferente  $Y$  y fase relativa  $\Phi$ . La magnitud y la fase de la salida  $y(t)$  están de hecho relacionadas con la función de transferencia  $G(s)$  a la frecuencia ( $\omega$  rad/s) de la salida sinusoidal.



**Fig. 1** Función de transferencia lineal con una entrada de onda senoidal.

Thus  $\frac{Y}{U} = |G(j\omega)| = \text{gain at } \omega$  .....

and  $\Phi = \angle G(j\omega) = \text{phase at } \omega$  .....

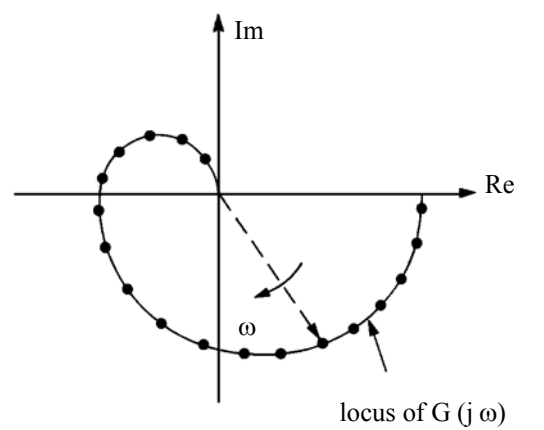


**Fig. 2** Entrada de onda senoidal y la respuesta en estado estable vista en el osciloscopio. La notación vectorial correspondiente se muestra a la derecha.

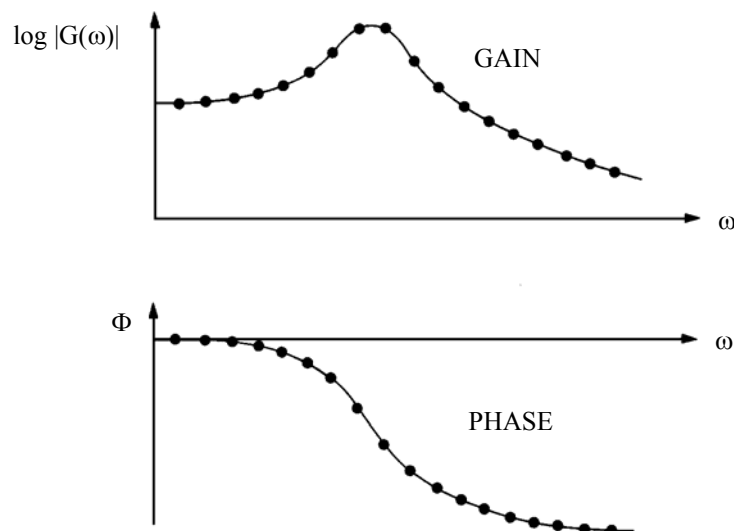
La fase relativa y magnitud de las formas de onda de entrada y salida pueden ser directamente medidos de un osciloscopio (Figura 2), aunque es inherente de pobre exactitud y en la práctica más métodos sofisticados son requeridos para remover ciertos errores los cuales ocurren debido al ruido, no linealidad y retroalimentación.

La gran ventaja del análisis de respuesta en frecuencia se basa en su frecuencia selectiva natural. Sólo un componente del espectro de frecuencia es extraído y la correspondiente respuesta en esa frecuencia puede ser desarrollada con gran precisión. Esto tiene significativas ventajas donde el sistema bajo consideración tiene resonantes características. Específicamente, las distintas resonancias pueden ser excitados y estudiados separadamente sin alterar otros modos oscilatorios.

**Fig. 3a**



**Fig. 3b** El eje de frecuencia normalmente se expresa en escala logarítmica.



*Fig. 3 Información de la respuesta en frecuencia.*

Mediante mediciones secuenciales la ganancia y la fase en varias frecuencias, una imagen del sistema de respuesta en frecuencia puede ser construido y trazado tanto como un diagrama Nyquist en el plano complejo (Fig. 3a) o una gráfica de ganancia contra frecuencia (Figura 3b.). Los siguientes son llamados diagramas de Bode porque de su uso se diseñan métodos basados en sistemas de control de Bode.

En adición a su frecuencia selectiva natural, el análisis de respuesta en frecuencia tiene la ventaja que las ondas senoidales tienen bien definidas sus características de amplitud. En particular, la amplitud máxima de una onda senoidal es solamente  $\sqrt{2}$  veces más grande que el valor de la raíz cuadrada principal. El radio

$$CF = \frac{\text{peak value of signal}}{\text{root mean square value of signal}}$$

Está en términos del factor cumbre (CF) y está diseñando señales de prueba para análisis de sistemas. Específicamente, uno usualmente desea inyectar mucho poder (como el determinado por el nivel de la raíz principal de la señal) dentro de un sistema como compatible con una respuesta de un sistema lineal.

La linealidad de los sistemas es usualmente relacionada con el pico de la señal de prueba la cual puede ser tolerada antes de que los efectos no lineales sean evidentes. La mejor excitación en este respecto es la forma de onda binaria con un factor de 1.41. La onda senoidal está razonablemente cerca de lo ideal, mientras que restándole el gran mérito de la excitación del sistema selectivo de frecuencia.

## 2. Resultado Básico

Aquí está una simple demostración del resultado, citado anteriormente, que la salida del estado inmóvil de un sistema lineal excitado por una onda senoidal es él mismo una onda senoidal con ganancia y fase relacionadas con la respuesta en frecuencia de la ecuación 1.

La salida del sistema de la figura 1 puede ser escrito como

$$Y(s) = G(s) U(s) \dots\dots\dots 2.$$

$$\text{where } U(s) = \mathcal{L}[U \sin \omega t] = \frac{U \omega}{(s^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots 3.$$

Suponer que el sistema  $G(s)$  es estable con polos distintos  $p_i$  [ $i = 1, \dots, n$ ] entonces la ecuación 2 puede ser escrita como:

$$Y(s) = U \left[ \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s + p_i)} + \frac{B_1}{(s - j\omega)} + \frac{B_1^*}{(s + j\omega)} \right]$$

Con su correspondiente transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = U \left[ \sum_{i=1}^n A_i \exp[-p_i t] + 2 |B_1| \cos(\omega t + \angle B_1) \right]$$

Donde

$|B_1|$  is the magnitude of  $B_1$   
 $\angle B_1$  is the angle or argument of  $B_1$

Y por regla de Heavisides,

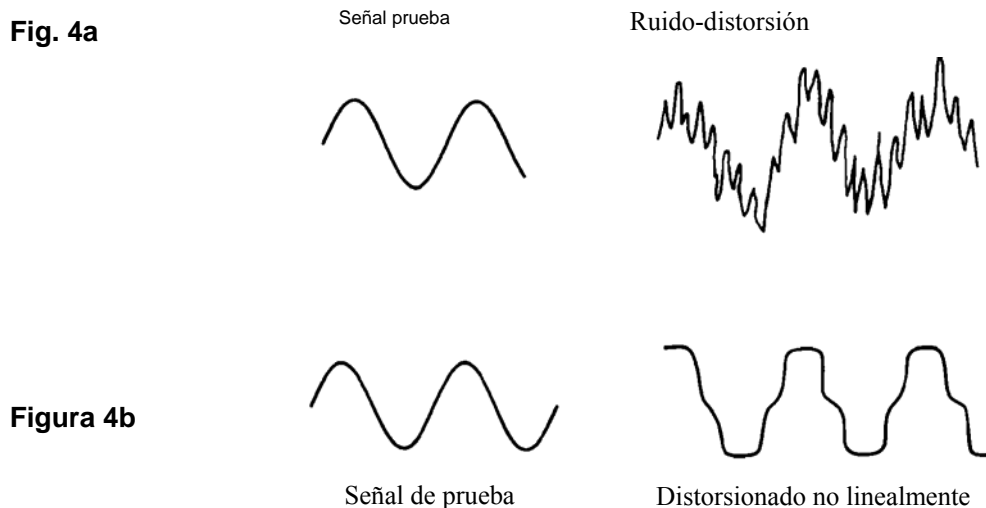
$$B_1 = \frac{G(j\omega)}{2j} \dots\dots\dots 6.$$

Ahora, después de un tiempo suficiente permite las transiciones para descomponerse, la salida del "estado estático" es obtenida. Combinando las ecuaciones 5 y 6 obtenemos:

$$y(t) = U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \dots\dots\dots 7.$$

### 3. Implementación

La ganancia relativa directa y el procedimiento de medición de fase mencionado anteriormente tienen fondos prácticos como un significado de la medición de Respuesta de frecuencia. Estos relacionan la distorsión de las señales de salida que ocurren en sistemas de ingeniería. Señales de distorsión son debidas a ruido externo el cual infecta las mediciones de salida (como en la figura 4a) y hace esto muy difícil para medir exactamente la ganancia y la fase. Señales de distorsión surgen de los efectos no lineales de un sistema, o procedimientos de medición, como que la salida medida no es una sinusoidal más grande (como en la figura 4b). De nuevo la medición directa de la ganancia y la fase es difícil.



**Fig, 4** En sistemas prácticos, aunque la señal de prueba aplicada podría ser senoidal, la respuesta es frecuentemente distorsionada debido al ruido,.

Ambos problemas de distorsión no lineal y distorsión de ruido están especificados en el esquema de medición de la Figura 5, en el cual la medición de salida  $y(t)$  es primero multiplicada por el seno y el coseno respectivamente y después integrada. Observe los dos procesos de multiplicación y promediación que son presentados en todo ruido suprimiendo técnicas de identificación y estimulación.

Efectivamente, el sistema de la figura 5 relaciona la salida  $y(t)$  con las diferentes versiones de la entrada, en consecuencia a los términos de la correlación del analizador de respuesta en frecuencia.

Brevemente, la correlación del analizador de funciones queda como sigue. El sistema de medición de salida es multiplicado por el seno y el coseno de la frecuencia de prueba  $\omega$ . Los resultados de las multiplicaciones son entonces alimentados para los dos integradores idénticos, donde estos son promediados sobre  $T$  segundos. Como el tiempo promedio incrementa la contribución de todas las componentes de frecuencia no deseadas en  $y(t)$ , se convierten en cero, y las salidas del integrador  $R(T)$ ,  $I(T)$  vienen a ser valores constantes que dependen solamente de la ganancia y la fase del sistema de la función de transferencia en la frecuencia de prueba.

En la práctica, la promediación es conducida sobre un intervalo finito de tiempo  $T$ , y es necesariamente por razones que serán explicadas después, que  $T$  sea un múltiplo entero de el periodo de la frecuencia de prueba.

En términos matemáticos, la correlación del analizador de funciones es como sigue:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U \sin \omega t \\
 y(t) &= Y \sin (\omega t + \Phi) \\
 \text{donde } Y &= U |G(j\omega)| \text{ and } \Phi = \angle G(j\omega)
 \end{aligned}$$

Entonces la salida  $R(T)$  está dada por

$$\begin{aligned}
 R(T) &= \frac{U}{T} |G(j\omega)| \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t + \Phi) dt \\
 &= \frac{U}{T} |G(j\omega)| \left[ \cos \Phi \left( \frac{T}{2} + \frac{\sin 2\omega T}{4\omega} \right) - \sin \Phi \left( \frac{\cos 2\omega T}{4\omega} - \frac{1}{4\omega} \right) \right] \quad \dots \quad \mathbf{8.}
 \end{aligned}$$

Por lo que cuando  $T = \frac{N\pi}{\omega}$ ,  $N = 1,2,3, \dots$  the sine channel output is

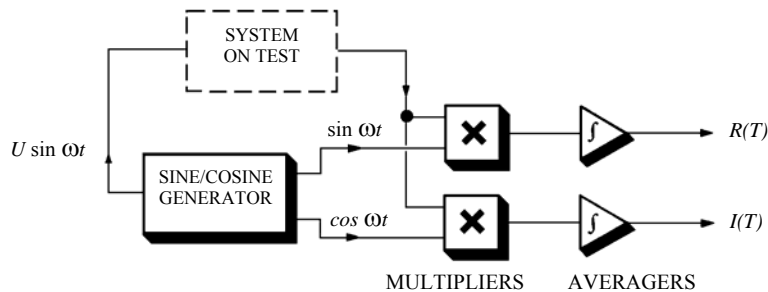
$$R\left(\frac{N\pi}{\omega}\right) = \frac{U}{2} |G(j\omega)| \cos \Phi \quad \dots \quad \mathbf{9.}$$

Similarmente la función de salida de coseno  $I(T)$  es dado por:

$$I(T) = \frac{U}{T} |G(j\omega)| \int_0^T \cos \omega t \sin (\omega t + \Phi) dt \quad \dots \quad \mathbf{10.}$$

Lo cual puede ser evaluado por  $T = \frac{N\pi}{\omega}$  como

$$I\left(\frac{N\pi}{\omega}\right) = \frac{U}{2} |G(j\omega)| \sin \Phi \quad \dots \quad \mathbf{11.}$$



**Fig. 5** Implementación de un analizador de correlación de la respuesta en frecuencia.

De la ecuación 9 y 11 la ganancia y la fase de la función de respuesta en frecuencia puede ser recuperada de las señales  $R(T)$ ,  $I(T)$  evaluado en los múltiplos apropiados de  $\pi/\omega$ . En la práctica, para evitar distorsión de armónicos no lineales en el resultado, el proceso de promediación es ejecutado de ciclos de la onda senoidal de entrada, por lo que el tiempo promedio es seleccionado como,

$$T = N \frac{2\pi}{\omega}, \quad N = 1,2,3, \dots$$

Promediando sobre múltiplos de  $2\pi/\omega$  evita distorsiones no lineales de los estimados y remueve también errores de mediciones asociados sobre la salida del sistema.

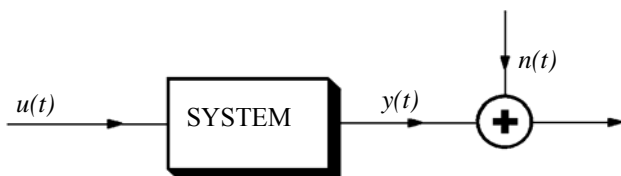
## 4. Supresión de Ruido.

La llave característica del analizador de respuesta en frecuencia es que para incrementos del tiempo promedio  $T$ , la influencia de ruidos externos sobre los procesos de medición pueden ser reducidos a verdaderos niveles bajos. Para ver cómo trabaja, considere la Figura 6 en el cual la salida del sistema es distorsionado por ruidos adicionados  $n(t)$ . Debido a que el ruido es agregado las señales de seno y coseno en el análisis de frecuencia será un error en un incremento  $\Delta R(T)$  and  $\Delta I(T)$  dado por:

$$\Delta R(T) = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \sin \omega_1 t dt \quad \dots\dots\dots 12.$$

$$\Delta I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \cos \omega_1 t dt \quad \dots\dots\dots$$

Ahora considere solamente el error de la señal seno (el error de coseno se comporta en una manera similar) e interprete la acción del proceso de promediación como una operación de filtrado.



**Fig. 6** El sistema con ruido.

Para hacer esto, observe que en la ecuación 12,  $\Delta R(T)$  puede ser escrito como:

$$\Delta R(T) = \frac{1}{T} \int n(t) \sin [\omega_1(T - t)] dt \quad \dots\dots\dots 13.$$

$$\text{Because } \sin \omega_1 t = -\sin [\omega_1(T - t)] , \text{ when } T = \frac{N2\pi}{\omega_1}$$

La ecuación 13 es una convolución entre la distorsión  $n(t)$  y el filtro con la respuesta al impulso (Figura 7)

$$h(\tau) = \frac{1}{T} \sin \omega_1 \tau \quad 0 < \tau < T \quad \dots\dots\dots 14.$$

La respuesta en frecuencia de este filtro es obtenido para notar que esto consiste de el producto de la función  $l(\tau)$  definido por

$$l(\tau) = \frac{1}{T} \quad 0 < \tau < T \quad \dots\dots\dots 15.$$

$$= 0$$

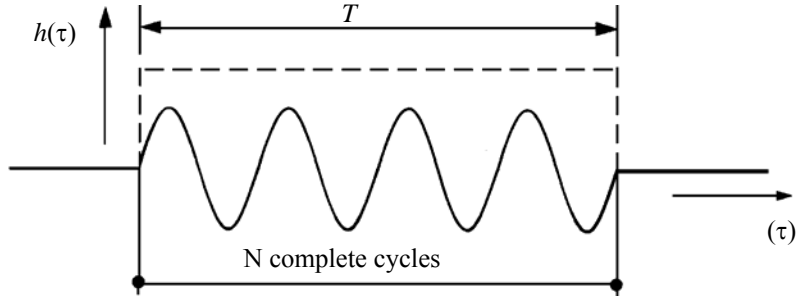
Y la onda senoidal  $\sin \omega_1 \tau$ . Ahora la onda senoidal puede ser escrita por

$$\sin \omega_1 \tau = \frac{1}{2j} (\exp[j\omega_1 \tau] - \exp[-j\omega_1 \tau]) \quad \dots\dots\dots 16.$$

En consecuencia, para el siguiente teorema en la frecuencia dominante:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2j} [L(j\omega + j\omega_1) - L(j\omega - j\omega_1)] \quad \dots\dots\dots 17.$$

where  $L(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) \exp[-j\omega t] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \exp[-j\omega t] dt$

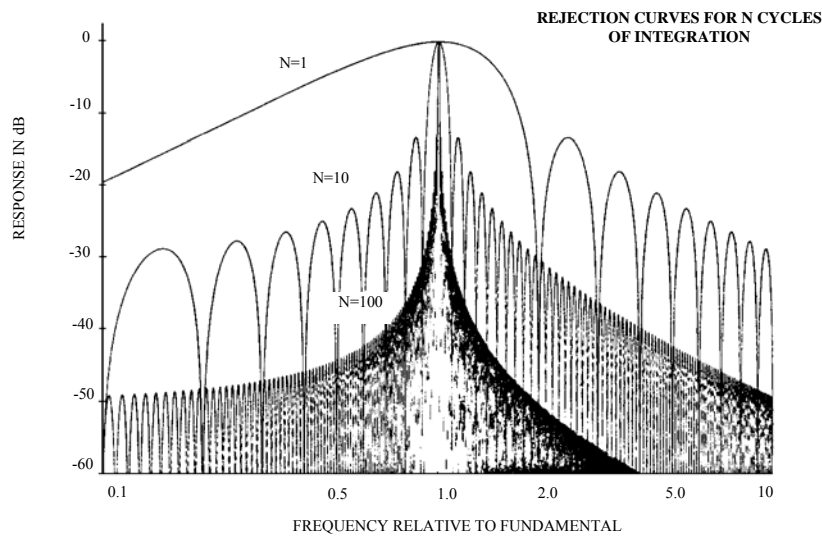


**Fig. 7** Respuesta al impulso del filtro de promediación en el analizador.

hence  $L(j\omega) = \frac{1}{j\omega T} (1 - \exp[-j\omega T]) = \frac{\exp[-j\frac{\omega T}{2}] \sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \quad \dots\dots\dots 18.$

Combining 17 and 18, the filter transfer function for  $T = \frac{2\pi N}{\omega_1}$  is

$$H(j\omega) = \frac{\omega_1 (1 - \exp[-j\omega T])}{T(\omega^2 - \omega_1^2)} \quad \dots\dots\dots 19.$$



**Fig. 8** Respuesta en frecuencia del filtro de promediación en el analizador.

La función de ganancia de  $H(j\omega)$  está mostrado en la figura 8. Como puede ser visto del cuadro, el promedio asociado con el analizador de respuesta en frecuencia actúa como un filtro pasabanda con frecuencia central  $\omega_1$ . Como el tiempo promedio  $T$  incrementa el ancho de banda de el flitro viene a ser más angosto. Aunque la influencia de la alteración de ancho de banda del ruido  $n(t)$  se incrementa el filtrado tanto como la correlación de tiempo lo hace. Esta etapa de incrementos para reducir inciertamente en las medidas es un método recurrente de técnicas de mediciones dinámicas y debería ser tomada en cuenta cuando se consideren mas ventajas en otros procedimientos que no son responsables a el simple argumento de filtrado usado aquí.

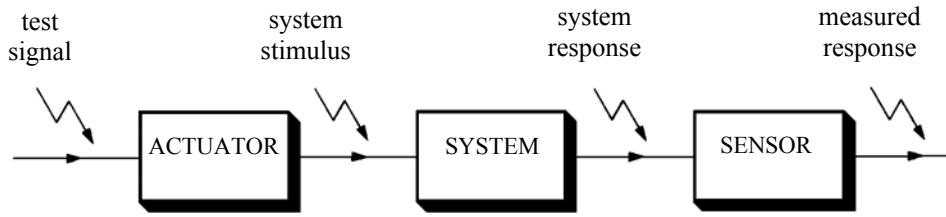
## 5. No linealidades

El objetivo del análisis de respuesta en frecuencia es para caracterizar la función de transferencia de un sistema dinámico lineal. De cualquier forma, en la realidad, los pequeños sistemas son lineales y por eso estamos realmente midiendo algunas aproximaciones lineales. En el análisis dinámico las formas más problemáticas de comportamientos no lineales son asociados con actuaciones (esto es, obtener señales dentro de un sistema) y sentidos (esto es, midiendo la respuesta de un sistema). Con frecuencia esas formas de comportamiento no lineal son severas, y podría no tener nada que hacer con la dinámica del sistema –solamente cómo nosotros los activamos. (figura 9). Típicamente, activación y medición no lineales no contienen dinámicas, pero constituye una característica de ganancia estática la cual distorsiona la información de entrada/salida. La primer cosa que el análisis trata de hacer es directamente sobre esta forma de no linealidad. Esto es frecuentemente posible poniendo el lazo de retroalimentación alrededor de los actuadores o usando los métodos de la siguiente sección. Donde esto no es posible, la instrumentación inteligente puede algunas veces compensar para no linealidad mediante la aplicación de una operación inversa no lineal. Muchos instrumentos de base de datos y programas incluyen esta característica.

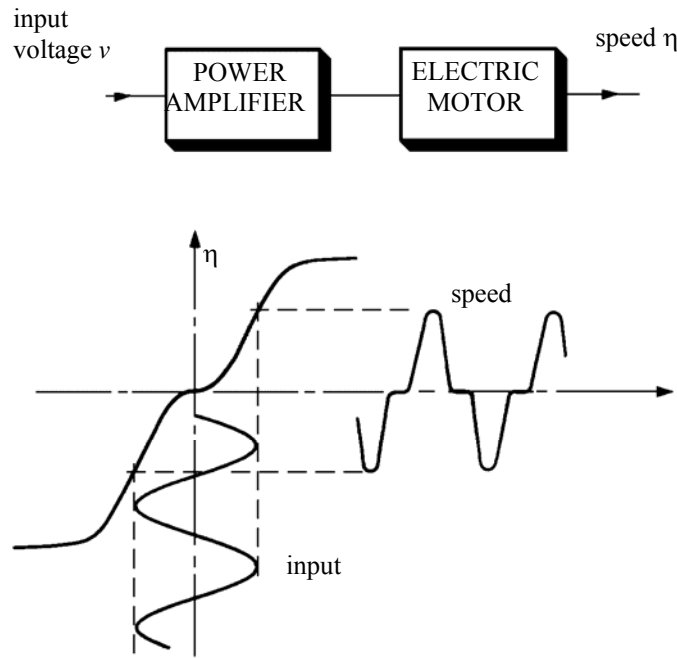
Cuando no podemos girar alrededor de la no linealidad, debe ser acomodado en el procedimiento de análisis. Para ver cómo esto podría ser hecho considere la Figura 10, la cual muestra una característica la cual podría ser asociado con un motor eléctrico. El efecto de alimentación de onda senoidal sobre esta no linealidad es también ilustrado.

La respuesta de alguna no linealidad para una onda senoidal puede ser expresada como una suma de ondas senoidales esnos y cosenos a las frecuencias  $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, 4\omega_1, \dots$ . De cualquier forma, remarcar que el filtro  $H(j\omega)$  asociado con el analizador de respuesta en frecuencia tiene ganancia cero a las frecuencias  $2\omega_1, 3\omega_1, \dots$  donde esos corresponden a ceros de  $L(j\omega)$  cuando  $T=N2\pi/\omega_1$ . Aunque el analizador de respuesta en frecuencia exactamente rechaza todos los componentes armónicos de salida  $x(t)$  (figura 11) generado por distorsión no lineal, y efectivamente medir la componente fundamental de respuesta. Esto tiene usos en el diseño de sistemas de control donde el describir el método de función las bizagras sobre la medida de la componente fundamental de una respuesta de frecuencia senoidal. Mediante la correlación de las salidas de un sistema con frecuencias de armónicos  $2\omega_1, 3\omega_1, \dots, i\omega_1, \dots$ . Los componentes de armónicos de la respuesta en frecuencia son obtenibles. Estos componentes de frecuencias más altas son usadas en computar la respuesta de frecuencia exacta y cualificando el nivel de distorsión no lineal. Esas mediciones de armónicos pueden ser usados por descripciones exactas de mediciones de función y descripciones del núcleo Volterra de el sistema.

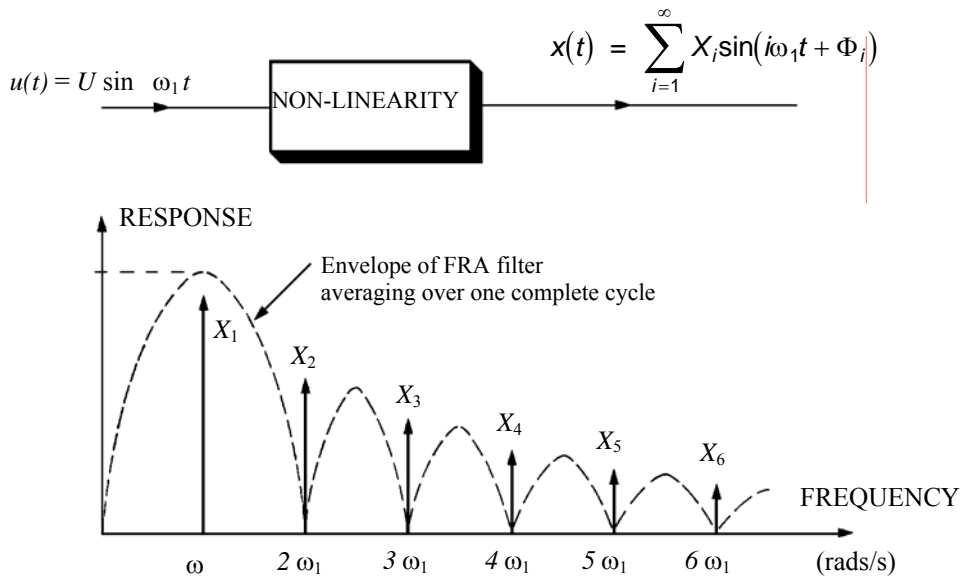
\* Esto no es siempre cierto, algunos actuadores y sensores frecuentemente forman parte integral de un sistema.



**Fig. 9** Actuadores y sensores en el sistema.



**Fig.10** Respuesta típica de la no linealidad en la respuesta del actuador y del sistema.



**Fig. 11** Las armónicas que se presentan en la respuesta del sistema no lineal se suprimen mediante el filtrado del analizador.

## 6. Lazo Cerrado y medición de entrada remota

La física encierra frecuentemente las mediciones del esquema de la figura 1 en forma impráctical. En particular, el sistema para ser examinado podría ser una parte integral de un sistema mas grande o un proceso inestable el cual puede ser mantenido bajo control de lazo cerrado todo el tiempo. Los más modernos analizadores de respuesta en frecuencia son modificados para proveer en situaciones similares. Considerar los dos casos básicos mostrados en la Figura 12 donde el sistema  $G(j\omega)$  está en lazo cerrado o bajo corriente en cascada o función de transferencia. Es asumido que las señales  $x(t)$ ,  $y(t)$  cada lado de el sistema probador puede ser medido y que un examen sinusoidal  $u(t)$  puede ser inyectado en algún punto en el que casualmente afecte  $x(t)$  (y  $y(t)$ ). El diseño de la función de transferencia modificada de la figura 13 es usada. En este esquema, las respuestas en frecuencia de  $r(t)$  a  $u(t)$  y  $r(t)$  a  $y(t)$  son medidas y la respuesta en frecuencia de  $G(j\omega)$  obtenida dividiendo la ganancia y restando la fase. En el sistema de referencia, las mediciones  $u(t)$  y  $y(t)$  regresan a la sinusoidal de prueba son las más importantes. Teóricamente esto relaciona a el método de "variables instrumentales" las cuales crecen de la teoría econométrica a el desarrollo con similares problemas de medición en datos fiscales y económicos. Prácticamente, esto permite examinar sistemas de lazo cerrado sin romper el lazo, y al mismo tiempo evitar la ambigüedad de la información de retroalimentación. La naturaleza de esta ambigüedad puede ser vista de las consideraciones de la Figura 14. Las dos relaciones pueden ser escritas por  $y$  y, aunque si la parte de ruido  $n(t)$  es cero, la relación es exacta y un análisis de respuesta en frecuencia de  $x(t)$  a  $y(t)$  da  $G(j\omega)$ .

$$y(s) = G(s)x(s) + n(s) \quad \text{forward path}$$

$$y(s) = \frac{1}{F(s)}[-x(s) + u(s)] \quad \text{feedback path}$$

20.

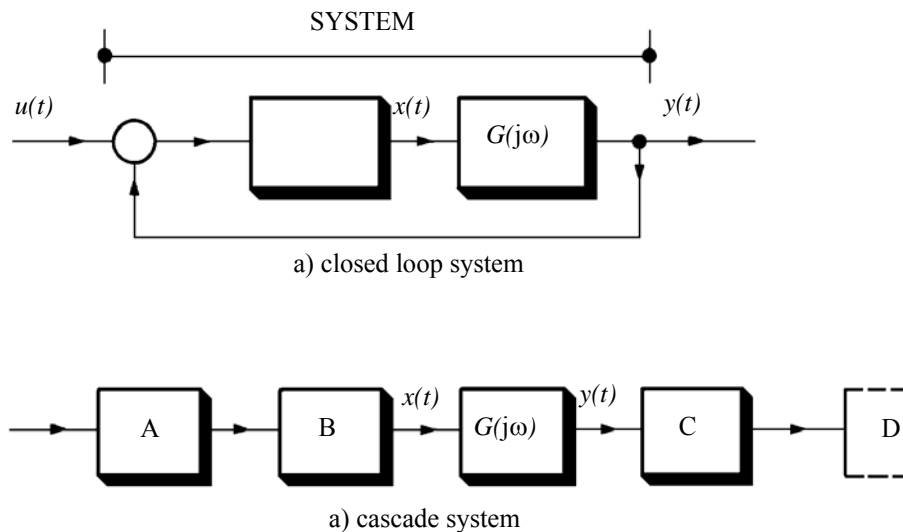


Fig. 12 Analizador punto a punto de la respuesta en frecuencia.

De cualquier forma, si  $u(t)$  es muy pequeño comparado con  $n(t)$  entonces la relación de la trayectoria de retroalimentación es exacta y un análisis de respuesta en frecuencia de  $x(t)$  a  $y(t)$  da  $-1/F(j\omega)$ .

Para valores intermedios de  $u(t)$  y  $n(t)$  una estimación es obtenida la cual es una función de  $G$ ,  $F$  y el poder relativo en  $u(t)$  y  $n(t)$ . El procedimiento de correlación regresa a  $u(t)$ , como el implementado en la figura 13, seguros de que no ocurra ninguna ambigüedad- Específicamente, la implementación modificada de mediciones del radio de las funciones de transferencia.

$\frac{y(s)}{u(s)}$  and  $\frac{x(s)}{u(s)}$  thus

$$\frac{\frac{y(s)}{u(s)}}{\frac{x(s)}{u(s)}} = \frac{\frac{G(s)}{1+FG(s)}}{1} = G(s)$$

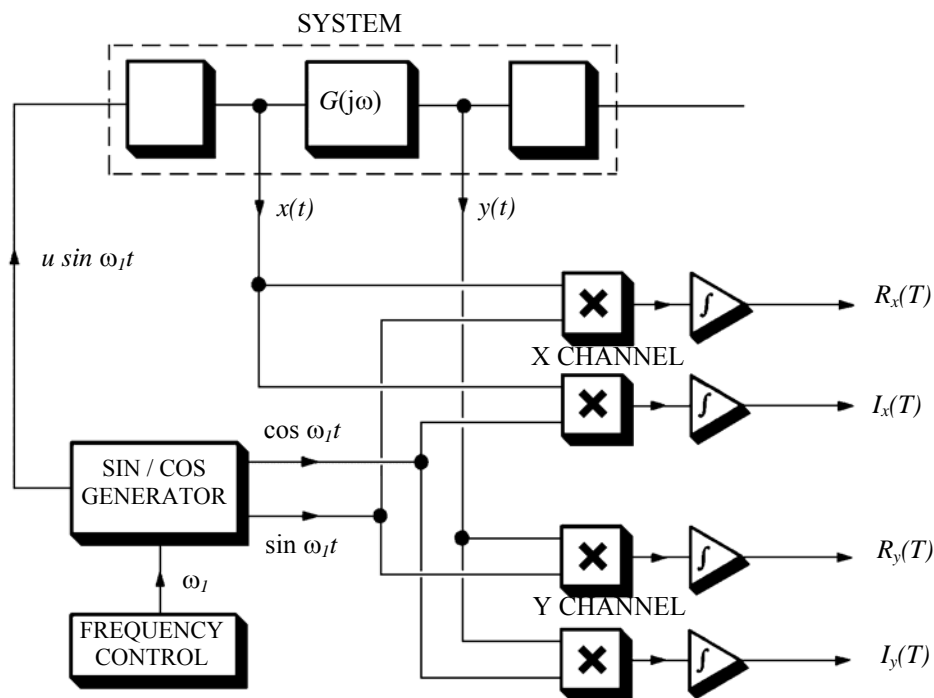


Fig. 13 Un analizador punto a punto de dos canales.

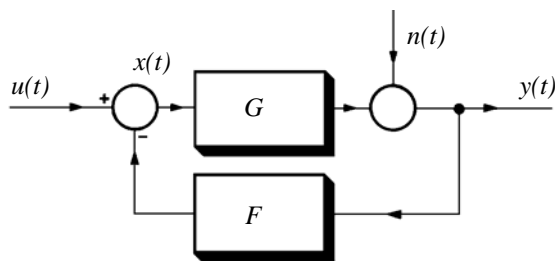
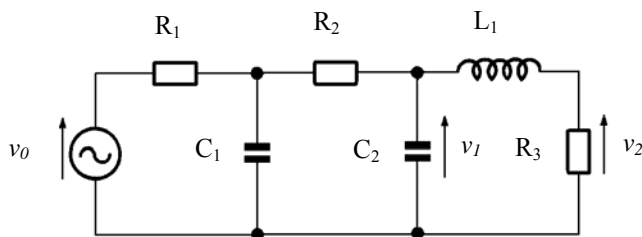
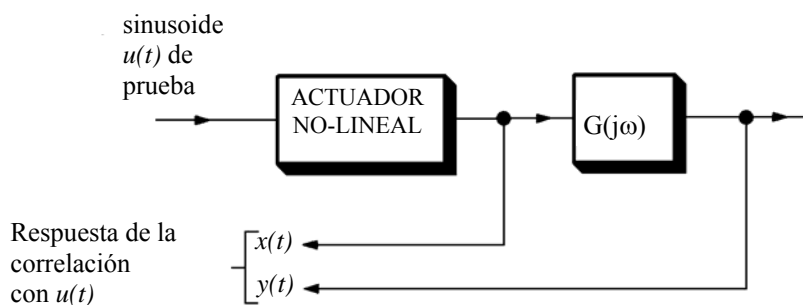


Fig. 14 El sistema de lazo cerrado.

Es importante para realizar esto que la retroalimentación entre dos señales necesita no ser por un explícito lazo cerrado. La retroalimentación podría ser implicada por la naturaleza del sistema, como en la red eléctrica de la Figura 15, donde las dos variables  $v_1, v_2$  no están relacionadas por una simple función de transferencia, pero cada unión de funciones de la fuente de voltaje  $V_0$ .



**Fig. 15** Voltajes variables en el circuito.

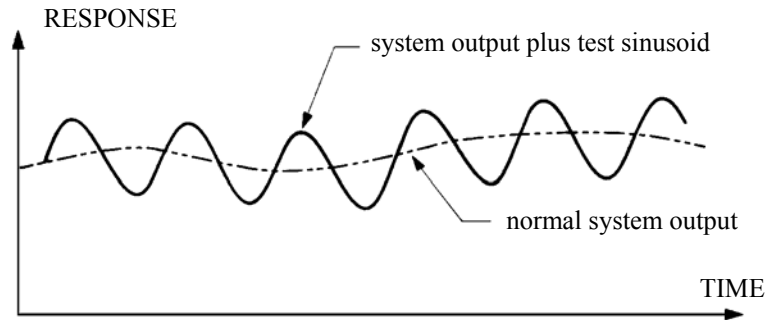


**Fig. 16** Sistema lineal con un actuador no lineal.

EL analizador de respuesta en frecuencia modificado puede también evitar problemas con distorsiones no lineales. Decir que el bloqu B en la figura 12 no es lineal, entonces mediante la relación de  $x$  y  $y$  regresa a  $u(t)$ , solamente la influencia de ña componente fundamental de  $x$  es usada y por lo tanto  $G(j\omega)$  es correctamente medido. Aun en un sistema de control de lazo abierto con actuador no lineal el esquema de prueba de la figura 16 evitará los efectos de la distorsión no lineal sobre la medición, previendo que puede ser hecha una medición de  $x(t)$ .

## 7. Drift y offsets

En la mayoría de situaciones típicas de un sistema con una onda senoidal aplicada a la entrada consistirá de un nivel de salida normal, con la componente sinusoidal de respuesta suprimida. Típicamente (figura 17) la salida del nivel consistirá de una corriente de fuga de DC, combinada con una desviación de baja frecuencia. Sobre todo, la amplitud de los componentes de fuga y la desviación podrían ser mucho más largas que la componente de la señal de prueba. Es muy importante encontrar formas de remover las componentes de baja frecuencia del sistema de salida para prevenirlos de distorsiones a los procesos de medición.



**Fig. 17** Salida medida del sistema que muestra el nivel normal de operación (incluyendo fugas, desajustes, etc.) y la respuesta a un test sinusoidal.

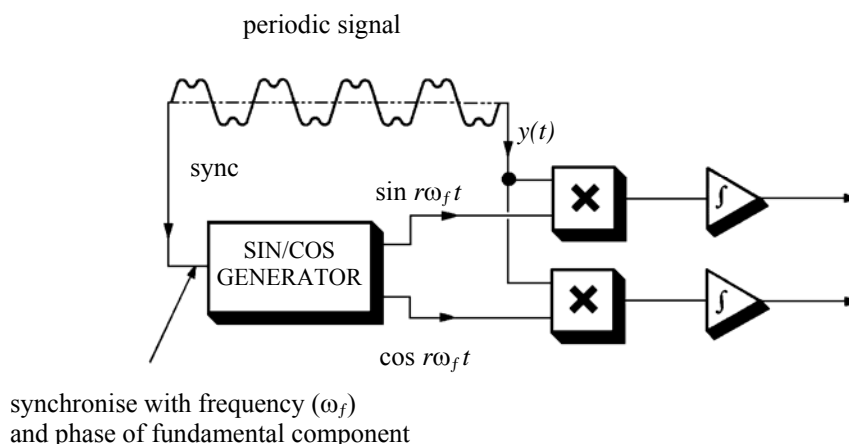
El procedimiento directo más práctico es para usar AC acoplado con un capacitor. Esto provee un gran filtro de paso el cual remueve componentes de baja frecuencia de respuesta pero deja componentes de onda senoidal sin alteraciones. De cualquier forma, es interesante notar que la respuesta de frecuencia promediada del filtro  $H(j\omega)$  tiene un cero en  $\omega=0$ , por lo que los componentes constantes de salida son siempre exactamente cancelados. Sobre todo, como el número  $N$  es incrementado (figura 8), el filtrado de baja frecuencia se vuelve más efectivo. EN situaciones prácticas, el método primario de remover fugas y desplazamientos de baja frecuencia es filtrando pasa altas o sustrayendo un estimado de la fuga de la señal original. Esto remueve a las fuentes de la mayor parte de los offset-drift mejora la resolución dinámica de la respuesta de frecuencia, y permite la acción de filtrado natural de  $H(j\omega)$  para suprimir efectos residuales.

## 8. Aplicaciones

Estas notas muestran algunas aplicaciones típicas del analizador de respuesta en frecuencia.

### (i) Análisis de armónicos.

En la práctica, uno frecuentemente conoce señales que son periódicas con una forma definida (i.e. Libre de ruido). En casos similares es frecuentemente usado para analizar la estructura de estas formas de onda, donde la ocurrencia de ciertos armónicos podrían dar entrada a su fuente. Por la misma señal podría haber un requerimiento que ciertos armónicos deben ser menores que un nivel pre-especificado. Esto es verdad, por ejemplo, probando generadores de señales comerciales donde parte de las especificaciones técnicas se refieren a permitir niveles armónicos.



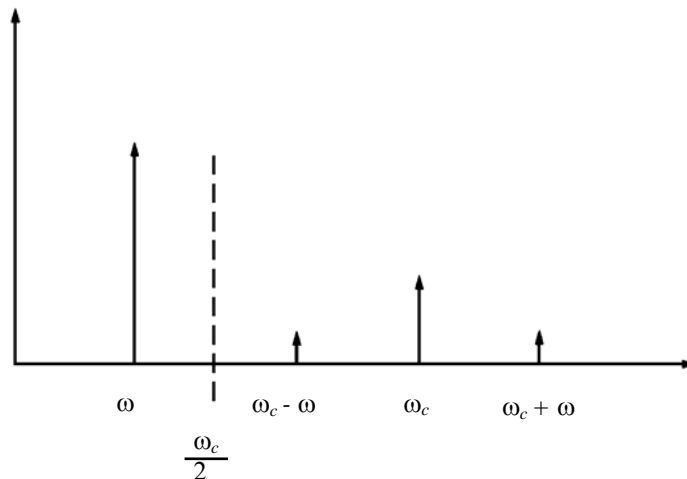
**Fig. 18** El analizador de la respuesta en frecuencia usado como un analizador de armónicas

El analizador de respuesta en frecuencia puede ser adaptado como un analizador armónico agregando a el circuito de la figura 5, la facilidad para sincronizar la frecuencia  $\omega_f$  y la fase de la sinusoidal de prueba con el periodo fundamental de la señal periódica. La señal periódica es tratada como si fuera la salida del sistema  $y(t)$  (ver figura 18) y relacionada con las frecuencias armónicas  $r\omega_f$  ( $r=1, 2, 3, \dots$ ) generada en el analizador de respuesta en frecuencia. Las señales de salida seno y coseno dan la ganancia relativa y la fase de los componentes armónicos. El uso de frecuencias armónicas en esta forma pueden ser aplicadas para medir el contenido de armónicos de  $\zeta$  respuesta de un sistema no lineal.

## ii) Análisis de la Función de Transferencia de Sistemas de AC

En adición a sistemas convencionales de retroalimentación de DC hay una clase de servomecanismos que emplean moduladores de amplitud de señales AC. El analizador de respuesta en frecuencia es particularmente efectivo a la respuesta examinando este tipo de sistemas de control por tres razones:

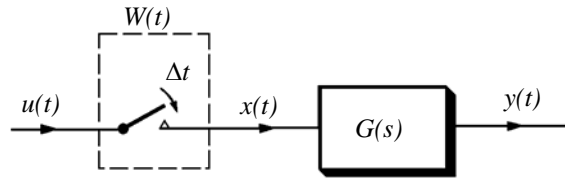
- Es particularmente fácil modular y demodular la amplitud de una señal de corriente alterna con señales senoidales.
- El factor de crestas bajas de una onda senoidal significa que un nivel relativo alto de modulación puede ser llevado a cabo antes de que ocurran efectos no lineales.
- Si la señal demodulada contiene todavía componentes de la frecuencia de la portadora, la acción de filtrado del analizador de respuesta en frecuencia tenderá a suprimir los componentes de frecuencia de la portadora.



**Fig. 19** *Espectro de frecuencia de una señal de amplitud modulada que ha sido demodulada de forma incorrecta.*

Un problema potencial con sistemas de modulación de AC ocurre cuando la frecuencia de análisis  $\omega$  se acerca a  $\omega_c/2$  donde  $\omega_c$  es la frecuencia de la portadora. El espectro de la señal demodulada (Figura 19) contendrá contribuciones en  $\omega$ ,  $\omega_c$  y  $\omega_c \pm \omega$ . Como  $\omega$  es incrementado, la fundamental y la banda lateral mas baja  $\omega_c - \omega$  convergen, hasta que  $\omega = \omega_c/2$ , ellos se encuentran y ambos contribuyen a la relación de salida. Dependiendo de las fases relativas de  $\omega$  y  $\omega - \omega$  el analizador de la función de transferencia puede tomar alguno de un grupo de rangos de valores. En la práctica, servo moduladores de AC tienen una respuesta en frecuencia que llena de ceros un gran rango de valores antes de  $\omega_c/2$ , por lo que este tipo de fenómenos no causan frecuentemente problemas.

## lii) Sistemas Muestreados



**Fig. 20** Sistema con muestreador.

El efecto de la modulación descrito antes puede causar problemas en sistemas que incluyen acciones muestreadas. Específicamente, considerar un sistema de datos muestreados (Figura 20) en el cual la señal de prueba  $u(t)$  es muestreada en un intervalo uniforme. La acción de muestrear puede ser escrita como:

$$x(t) = u(t) W(t) \dots\dots\dots 22.$$

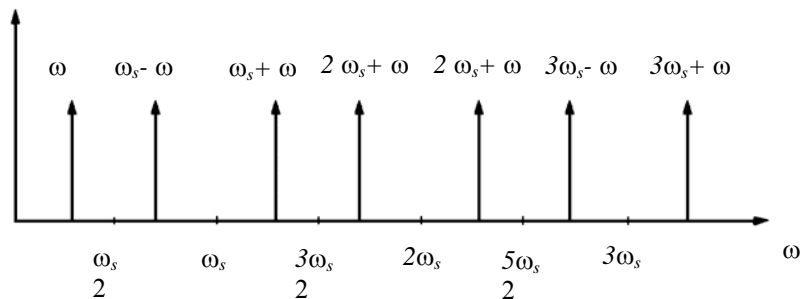
Donde el muestreador  $W(t)$  es un tren de impulsos separados  $\Delta\tau$  segundos. Ahora el muestreador puede ser considerado como una serie en términos de armónicas de  $\omega_s$ , donde  $\omega_s = 2\pi/\Delta t$ .

$$\text{i.e. } W(t) = \frac{1}{\Delta t} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega_s t \right) \dots\dots\dots 23.$$

Si la entrada es una senoidal de frecuencia  $\omega$  y fase relativa  $\Phi$  entonces la salida muestreada es

$$x(t) = \frac{1}{\Delta t} \left[ \sin(\omega t + \Phi) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\omega t + \Phi) \cos k\omega_s t \right] \dots\dots\dots 24.$$

$$x(t) = \frac{1}{\Delta t} \left[ \sin(\omega t + \Phi) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sin(k\omega_s t + \omega t + \Phi) - \sin(k\omega_s t - \omega t - \Phi) \right] \right] \dots\dots\dots 25.$$



**Fig. 21** Espectro de frecuencia de la señal muestreada  $x(t)$ .

El espectro de frecuencia de este es mostrado en la Figura 21. Observe que cuando  $\omega = \omega_s/2$  la banda lateral inferior coincide con la frecuencia fundamental y da un componente de  $x(t)$  a la frecuencia  $\omega = \omega_s/2$  determinada por  $x(t)$  y definida por

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \sin(\omega t + \Phi) - \sin(\omega t - \Phi) \right] \dots\dots\dots 26. \\ &= \frac{2}{\Delta t} \cos \omega t \sin \Phi \end{aligned}$$

## 9. Conclusiones

No se ha publicad un artículo del cual yo esté seguro que describe el análisis de respuesta en frecuencia y sus aplicaciones en alguna forma sencilla. Estas notas tienen la finalidad de llenar este hueco y dar una introducción a latécnica de análisis de respuesta en frecuencia y mostrar cómo y dónde puede ser usado. En orden para mantener cosas breves. Yo he cosolamente agragado el uso de FRA para sistemas de datos muestreados y procesos no lineales. Aunque tampoco he dado una aplicación concreta como me gustarpia haberlos hecho. He omitido las propiedades estadísticas de las estimaciones obtenidas de la correlación FRA. Esto esde nuevo por razones de espacio y porque la mayoría usuarios no los necesitará. Ellos pueden ser derivados usando una suposición de normatividad de los estimados y luego determinar la variación de lo estimado en forma ususal. Para una completa explicación ver el trabajo 'Random Data: Analysis and Measurement Procedures' by J.S. Bendat and A. G. Piersol, (Wiley 1986).

Peter Wellstead, Marco A. Pérez Cisneros.  
Cheshire, Inglaterra, 31 de Enero de 2003.